Varianta 9

Subiectul I

a) $h = 3\sqrt{3}$.

b) $AC = \sqrt{2}$.

c) $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

d) $a = 1, b = -3$.

e) $S_{ABC} = \frac{1}{2}$.

f) $S = 16$.

Subiectul II

1.

a) $x_1 + x_2 = -7$.

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$.

c) $x = 1$ sau $x = 2$.

d) $x = 3$.

e) $p = \frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$.

b) $\int_0^1 f'(x)dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.

c) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

d) $f'(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Subiectul III

a) $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

b) $f(x) = \frac{x + 1 + 2}{x + 1} = 1 + \frac{2}{x + 1}, \forall x \geq 1$.

c) $f(x)=x \Rightarrow \frac{x+3}{x+1}=x \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$, deci $x=\sqrt{3}>1$.

d) Din **b)** avem $f'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}<0, \forall x\in[1,\infty) \Rightarrow$ f este descrescătoare pe $[1,\infty)$.

e) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2x+3}{x+2}$.

f) $|f(x)-f(y)|=\left|1+\frac{2}{x+1}-1-\frac{2}{y+1}\right|=2\left|\frac{y-x}{(x+1)(y+1)}\right|=2\frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)}<\frac{1}{2}|x-y|$.

g) Punând $x=\frac{p}{q}$, $y=\sqrt{3}$, $(p\ge q\Rightarrow x\ge 1)$ în inegalitatea de la **f)** se obține inegalitatea cerută.

Subiectul IV

a) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

b) $f(e)=\frac{1}{e}$, $f'(e)=0$.

c) Din $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\le 0, \forall x\in[e,\infty)$ $\Rightarrow$ funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[e,\infty)$.

d) Dacă $x\in(0,e] \Rightarrow \ln x\le 1 \Rightarrow f'(x)\ge 0 \Rightarrow$ funcția f este strict crescătoare pe $(0,e]$. Folosind **c)** rezultă $x=e$ este punct de maxim global $\Rightarrow f(x)\le f(e), \forall x\in(0,\infty)$, deci $f(x)\le\frac{1}{e}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

e) $I=\int_1^e f(x)dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e=\frac{1}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

g) Din $f(x)\le\frac{1}{e}$, $\forall x\in(0,\infty)$ avem $f(x)+f\left(\frac{x^2}{e}\right)\le\frac{2}{e}$ cu egalitate pentru $x=e$.